Задача 1. Представим, что учитель каким-то образом рассадил учеников за парты. Ученикам разрешено пересаживаться так, как они захотят, если при этом соблюдаются следующие условия.

1. За один раз либо двое меняются местами, либо один пересаживается на свободное место.
2. Никакие два мальчика и никакие две девочки не могут сидеть вместе.
3. Новая посадка нравится каждому из пересевших не меньше, чем старая.

Пусть предпочтения учеников не меняются со временем; возможно, кому-то приятнее сидеть одному, чем с кем-то из одноклассников (то есть человек может выбрать себе пустой стул в качестве соседа). Ученики заканчивают пересаживаться в тот момент, когда никто не может обменяться местами с соблюдением всех указанных выше условий.

а) Верно ли, что пересаживания когда-нибудь обязательно закончатся?
б) Верно ли, что пересаживания закончатся, если пересаживаются только мальчики?
в) А если ученикам одного пола разрешено сидеть вместе за одной партой?
г) Допустим, пересаживания закончились. Может ли найтись ученик (ученица), которому сосед по парте менее приятен, чем кто-либо из одноклассников?

Задача 2. Пусть все абитуриенты сдают ровно один экзамен, а вузы оценивают их только по этому параметру. Пусть поступить хотят n абитуриентов, и для каждого из них известен приоритет по вузам. Придумайте алгоритм, дающий устойчивое распределение абитуриентов по вузам, если:
а) вузов ровно n, и в каждом ровно одно место; **б)** вузов m, количество мест в i-ом вузе равно n_i.

Определение 1. Пусть имеются множество мальчиков M и множество девочек W. Любое разбиение мальчиков и девочек на пары будем называть *паросочетанием.* Пусть также известны предпочтения каждого мальчика (с какой девочкой он хочет встречаться) и каждой девочки (с каким мальчиком она хочет встречаться). *Алгоритм Гейла-Шепли* поиска паросочетания заключается в следующем:

1. Каждый мальчик делает предложение той девочке, которая ему больше всего нравится.
2. Если девочка получила несколько предложений, то она оставляет на рассмотрение самое лучшее, а остальные отвергает.
3. Каждый отвергнутый мальчик делает предложение следующей по списку предпочтений девочке.
4. И так далее (пункты 2 и 3 повторяются по циклу).

Задача 3. **а)** Докажите, что алгоритм Гейла-Шепли закончит свою работу.
б) Докажите, что паросочетание, получаемое при помощи алгоритма Гейла-Шепли, *стабильно*, то есть в нём нет таких мальчика и девочки, которые оба предпочли бы встречаться друг с другом, нежели со своим текущим партнёром.
в) Правда ли, что алгоритм, придуманный вами в задаче 2, является частным случаем алгоритма Гейла-Шепли?

Задача 4. Пусть $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ и $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а предпочтения таковы:

предпочтения мальчиков	предпочтения девочек
$a : 6 \succ 5 \succ 7 \succ 8 \succ 1 \succ 3 \succ \text{alone} \succ 4 \succ 2$	$1 : c \succ \text{alone} \succ g \succ f \succ d \succ e \succ a \succ h \succ b$
$b : 1 \succ 8 \succ 3 \succ 7 \succ 4 \succ 5 \succ 6 \succ 2 \succ \text{alone}$	$2 : a \succ c \succ \text{alone} \succ d \succ b \succ h \succ g \succ e \succ f$
$c : 7 \succ 6 \succ 3 \succ 2 \succ \text{alone} \succ 1 \succ 5 \succ 8 \succ 4$	$3 : c \succ d \succ g \succ \text{alone} \succ b \succ h \succ f \succ e \succ a$
$d : 3 \succ 8 \succ 6 \succ 4 \succ 5 \succ 1 \succ \text{alone} \succ 7 \succ 2$	$4 : d \succ a \succ e \succ h \succ g \succ b \succ \text{alone} \succ c \succ f$
$e : \text{alone} \succ 2 \succ 3 \succ 7 \succ 1 \succ 6 \succ 5 \succ 4 \succ 8$	$5 : b \succ d \succ \text{alone} \succ f \succ a \succ h \succ e \succ c \succ g$
$f : 4 \succ 2 \succ 5 \succ 7 \succ 1 \succ 8 \succ 3 \succ \text{alone} \succ 6$	$6 : d \succ c \succ b \succ f \succ h \succ e \succ a \succ g \succ \text{alone}$
$g : 4 \succ \text{alone} \succ 2 \succ 5 \succ 3 \succ 7 \succ 8 \succ 1 \succ 6$	$7 : h \succ e \succ a \succ g \succ f \succ b \succ d \succ \text{alone} \succ c$
$h : 4 \succ 6 \succ 5 \succ 1 \succ 2 \succ \text{alone} \succ 7 \succ 3 \succ 8$	$8 : a \succ f \succ b \succ c \succ g \succ \text{alone} \succ e \succ d \succ h$

а) Найдите стабильное паросочетание с помощью алгоритма Гейла-Шепли.
б) Найдите стабильное паросочетание, если предложение делают не мальчики, а девочки.
в) В каком из паросочетаний лучше девочкам, а в каком — мальчикам?

1 а	1 б	1 в	1 г	2 а	2 б	3 а	3 б	3 в	4 а	4 б	4 в

Задача 5. Приведите пример множеств M и W, каждый элемент которых снабжён предпочтениями, для которых существует больше двух стабильных паросочетаний.

Определение 2. Элементы $m \in M$ и $w \in W$ называются *допустимыми партнёрами*, если существует стабильное паросочетание, в котором элементы m и w образуют пару.

Определение 3. Стабильное паросочетание называется *M-оптимальным*, если в нём каждый мальчик образует пару с наилучшим из своих допустимых партнёров. Если же каждый мальчик образует пару с наихудшим из своих допустимых партнёров, то паросочетание называется *M-пессимистичным.*

Задача 6. Докажите, что паросочетание, получающееся при помощи алгоритма Гейла-Шепли, является **а)** M-оптимальным; **б)** W-пессимистичным.

Задача 7. Пусть паросочетание, получающееся для множеств M и W при помощи алгоритма Гейла-Шепли (когда предложение делали мальчики), совпало с паросочетанием, полученным, когда предложение делали девочки. Сколько может быть стабильных паросочетаний для данных M и W?

Задача 8. Правда ли, что в условиях задачи 2 стабильное паросочетание единственно?

Задача 9. **а)** Предположим, что один из мальчиков узнал предпочтения всех остальных. Может ли ему быть выгодно сделать вид, что у него другие предпочтения, если для получения стабильного паросочетания применяется алгоритм Гейла-Шепли?
б) А может ли быть выгодно девочке сымитировать ненастоящие предпочтения, если она узнала о предпочтениях всех остальных?

Задача 10. **а)** Предположим, что несколько мальчиков узнали предпочтения всех остальных. Может ли им быть выгодно, действуя сообща, сымитировать ненастоящие предпочтения, если для получения стабильного паросочетания применяется алгоритм Гейла-Шепли?
б) А если о предпочтениях всех остальных узнала группа девочек?

Задача 11. Пусть студенты a, b, c, d, e, f, g, h живут в комнатах под номерами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ соответственно и вдруг решили переселиться таким образом, чтобы никто из них не стал жить хуже. Придумайте алгоритм, позволяющий это сделать, и примените его в том случае, если предпочтения студентов выглядят следующим образом:

$a: 3 \succ 1 \succ 7 \succ 8 \succ 5 \succ 2 \succ 4 \succ 6$	$b: 5 \succ 1 \succ 8 \succ 7 \succ 6 \succ 2 \succ 3 \succ 4$
$c: 1 \succ 3 \succ 7 \succ 2 \succ 6 \succ 5 \succ 8 \succ 4$	$d: 7 \succ 8 \succ 3 \succ 1 \succ 5 \succ 6 \succ 4 \succ 2$
$e: 8 \succ 5 \succ 7 \succ 1 \succ 6 \succ 3 \succ 4 \succ 2$	$f: 2 \succ 6 \succ 5 \succ 4 \succ 1 \succ 8 \succ 3 \succ 7$
$g: 1 \succ 3 \succ 5 \succ 6 \succ 8 \succ 7 \succ 2 \succ 4$	$h: 3 \succ 5 \succ 8 \succ 1 \succ 2 \succ 7 \succ 4 \succ 6$

5	6 а	6 б	7	8	9 а	9 б	10 а	10 б	11

Примечание. Алгоритм Гейла-Шепли впервые был представлен миру в 1962 году, когда Дэвид Гейл (1921-2008 гг.) и Ллойд Шепли (1923-2016 гг.) опубликовали математическую статью с неожиданным названием «Приём в колледжи и стабильность брака». Общество не сразу оценило значимость работы. Лишь через 30 лет стараниями Элвина Рота (р. 1951 г.) началась разработка основанных на ней социальных проектов. Сегодня в США и некоторых других странах распределение старшеклассников по школам и начинающих врачей по больницам, а также подбор доноров для пересадки почек осуществляются на базе тех самых идей. За создание и внедрение в практику теории оптимального распределения Шепли и Роту в 2012 году была присуждена Нобелевская премия по экономике (Гейл к тому времени, к сожалению, уже умер).

Простой житейский смысл всей этой теории, увы, расходится с романтическими образами из сказок. Оказывается, если хочешь лучшей жизни, то сидеть сложа руки и ждать принца на белом коне — не самая блестящая идея. А уж если сидишь и ждёшь — плети козни!