

Целые точки в многоугольниках-I.

Задача 1. Докажите, что произвольный целочисленный треугольник можно получить, последовательно отрезая от подходящего прямоугольника со сторонами параллельными линиям координатной сетки прямоугольные треугольники.

Задача 2. Вершины треугольника ABC расположены в узлах целочисленной решетки, причем на его сторонах других узлов нет, а внутри его есть ровно один узел O . Докажите, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC .

Задача 3. Докажите, что квадрат со стороной n не может накрыть более $(n+1)^2$ точек целочисленной решетки.

Задача 4. Упорядочим все дроби a/b , где $0 < a < b \leq n$ по возрастанию (такая последовательность называется *последовательностью Фарея* F_n). Пусть a/b и c/d — соседние члены этой последовательности. Докажите, что $ad - bc = 1$.

Задача 5. Докажите, что всякая *аддитивная и инвариантная* функция на множестве M (такие функции мы будем называть *удобными*) принимает одинаковые значения на целочисленных отрезках, не содержащих узлов решетки кроме своих концов.

Задача 6. Сформулируйте и докажите формулу Пика для целочисленных многоугольников с *дырками*.

Задача 7. Постройте 5 разных удобных функций.

Целые точки в многоугольниках-I.

Задача 1. Докажите, что произвольный целочисленный треугольник можно получить, последовательно отрезая от подходящего прямоугольника со сторонами параллельными линиям координатной сетки прямоугольные треугольники.

Задача 2. Вершины треугольника ABC расположены в узлах целочисленной решетки, причем на его сторонах других узлов нет, а внутри его есть ровно один узел O . Докажите, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC .

Задача 3. Докажите, что квадрат со стороной n не может накрыть более $(n+1)^2$ точек целочисленной решетки.

Задача 4. Упорядочим все дроби a/b , где $0 < a < b \leq n$ по возрастанию (такая последовательность называется *последовательностью Фарея* F_n). Пусть a/b и c/d — соседние члены этой последовательности. Докажите, что $ad - bc = 1$.

Задача 5. Докажите, что всякая *аддитивная и инвариантная* функция на множестве M (такие функции мы будем называть *удобными*) принимает одинаковые значения на целочисленных отрезках, не содержащих узлов решетки кроме своих концов.

Задача 6. Сформулируйте и докажите формулу Пика для целочисленных многоугольников с *дырками*.

Задача 7. Постройте 5 разных удобных функций.