Школа 57 1 сентября 2012г
9 «В» класс Alg 2

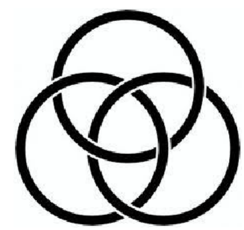
# Как я провел лето.

**Задача 1.** a) Найдите количество *правильных* раскрасок графа “три дома, три колодца” $K_{3,3}$ в $c$ цветов.

b) Сколькими способами можно ориентировать 9 ребер графа $K_{3,3}$ так, чтобы в получившемся ориентированном графе не было ни одного ориентированного цикла?

**Задача 2.** a) Вычислите полином Конвея *зацепления Борромео.*

b) Докажите, что полином Конвея $\nabla(L)$ всякого узла $L$ состоит из одночленов чётной степени.



**Задача 3.** Разложите в цепную дробь a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{57}$.

**Задача 4.** Даны прямая $l$ и окружность $\omega$. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся $l$ и $\omega$.

**Задача 5.** Пусть $h_1, h_2, h_3$ — высоты треугольника, $r$ — радиус вписанной окружности. Докажите, что $h_1 + h_2 + h_3 \geqslant 9r$.

**Задача 6.** Пусть $C$ – фокус эллипса, а $AB$ – его хорда, проходящая через $C$. Пусть $P$ — точка пересечения касательных к эллипсу в точках $A$ и $B$. Докажите, что $PC \perp AB$.
*Hint: Точка пересечения вневписанной окружности со стороной делит периметр пополам*

**Задача 7.** Вычислите символ Лежандра $\left(\dfrac{8}{47}\right)$.

**Задача 8*.** Докажите, что в группе $A_5$ нет нетривиальных нормальных подгрупп.

**Задача 9.** Даны $a, b, c > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}.$$

**Задача 10.** Докажите *оптическое свойство* параболы: касательная в точке $P$ параболы является биссектрисой угла между лучами $PF$ и $PH$, где $F$ — фокус параболы, $H$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $P$ на директрису.

**Задача 11.** Обозначим через $\mathbb{Z}_m^* \subset \mathbb{Z}_m$ те вычеты по модулю $m$, которые взаимно просты с $m$. Докажите, что $\mathbb{Z}_m^*$ образует группу относительно операции умножения.

**Задача 12.** a) Найдите количество способов раскрасить грани куба в 6 цветов (каждый цвет должен быть использован). Раскраски, отличающиеся поворотом куба считаются одинаковыми.

$b^*$) Тот же вопрос про раскраски додекаэдра в 12 цветов.